Medve Szabadtéri Matekverseny

Országos döntő

Jegesmedve kategória (11. és 12. osztály)

Feladatok részletes megoldással

2019. június 1.

Tartalomjegyzék

1. feladat

Mök Töhötöm pingpongozni ment két testvérével, Álmossal és Előddel. Az első meccset Álmos játszotta Előd ellen, a következő játékokban pedig mindig az előző vesztes pihent. Végül Álmos 8, Előd 17, Töhötöm pedig 13 meccset nyert. Hányszor játszott egymással Töhötöm és Álmos?

Végeredmény

10

Megoldás

1. Minden lejátszott meccset pontosan egy játékos nyert meg, tehát hármuk győzelmeinek az együttes száma megegyezik a meccsek számával $\implies 8 + 17 + 13 = 38$ meccset játszottak.
2. Töhötöm és Álmos pontosan azokon a meccseken játszott egymással, amelyek alatt Előd pihent.
3. A lejátszott 38 meccs alatt Előd szemszögéből végig három fázis ismétlődik (ebben a sorrendben, a játék elején az (a)-val kezdődően):
   (a) valahány (esetleg 0) egymást követő győzelem,
   (b) 1 vereség,
   (c) 1 pihenő.

   Tudjuk, hogy Előd összesen 17 alkalommal nyert. Ha ezeket a meccseket egyáltalán nem vesszük figyelembe, akkor a maradék 21 meccs alatt a (b) és (c) fázisok váltják egymást, (b)-vel indulóan. Tehát Előd 11 alkalommal veszít, 10 meccsen keresztül pedig pihen.
4. Tehát Töhötöm és Álmos összesen 10-szer játszott egymás ellen.

2. feladat

A Picur Édességgyár egyik kedvelt terméke a Barackocka. Ez úgy készül, hogy egy darab aszalt barackot kocka formájúra vágnak, majd minden lapjára különböző bevonó kerül. Így mindegyik kockának van egy fehércsokis, egy tejcsokis, egy étcsokis, egy keserű csokis, egy kakaós és egy kávés lapja. Egy gyárlátogatás során Gombóc Artúr zsebre vágott néhány Barackockát, hogy otthon megegye őket. Sajnos ezek a kockák (teljes lapfelülettel) összeragadtak a zsebében. Mivel Artúr nem bírt várni, így hazafele úton lenyalta a bevonót a zsebében lévő összeragadt test felületéről. Legalább hány Barackockát vágott zsebre Gombóc Artúr, ha ugyanannyi tejcsokit nyalt le, mint amennyi étcsokit, fehércsokit és keserű csokit összesen?

Végeredmény

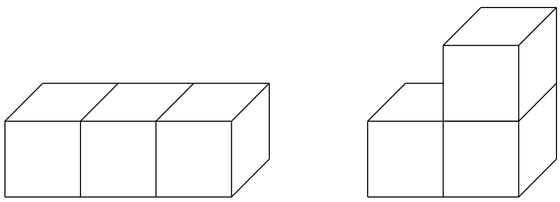
4

Megoldás

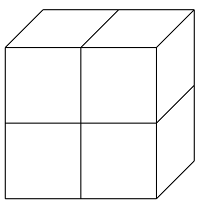
1. Egy kocka esetén a feladatban leírt csokoládéfogyasztás nem történhet meg, hiszen akkor egy lapnyi tejcsokit, és összesen három lapnyi ét-, fehér- és keserű csokoládét nyalt volna le.

2. Két kocka esetén az összeragadás következtében az összes lap közül 2 nem látszik. Ekkor a test felületén a tejcsokis lapok száma legfeljebb 2, az ét-, fehér- és keserű csokoládés lapok száma összesen legalább $2 \cdot 3 - 2 = 4$, hiszen az összes ilyen ízű lap közül legfeljebb 2 nem került a felszínre. Így a feladatban leírt csokoládéfogyasztás két kocka esetén nem fordulhatott elő, mert biztosan kevesebb tejcsokit nyalt le, mint a másik három ízt összesen.

3. Három kocka kétféleképp ragadhat össze egy testté teljes lapfelület mentén, ahogy az ábrán látható. Mindkét esetben a kockák lapjai közül 4 kerül a test belsejébe. Így a test felületén a tejcsokis lapok száma legfeljebb 3, az ét-, fehér- és keserű csokoládés lapok száma összesen legalább $3 \cdot 3 - 4 = 5$, hiszen az összes ilyen ízű lap közül legfeljebb 4 nem került a felszínre. Így a feladatban leírt eset három kocka esetén nem fordulhatott elő, mert biztosan kevesebb tejcsokit nyalt le, mint a másik három ízt összesen.



4. A négy kockából előálló testek közül az ábrán látható olyan, hogy a kockáknak összesen 8 lapja kerül a test belsejébe. Ekkor a test felületén a tejcsokis lapok száma legfeljebb 4, az ét-, fehér- és keserű csokoládés lapok száma összesen legalább $4 \cdot 3 - 8 = 4$. Tehát ha az összes tejcsokis lap a test felszínén marad, és a test belsejébe kerülő lapok mindegyike az ét-, fehér- és keserű csokoládésak közül kerül ki, akkor előállhat a feladatban leírt csokoládéfogyasztás. Ez meg is történhet, ugyanis minden kockának két szomszédos lapja kerül a test belsejébe, és az ét-, fehér- és keserű csokoládés lapok közül bármilyen elrendezés esetén van két szomszédos.



3. feladat

A Matematikus Medveképző Általános Iskola egy osztályában minden medvebocs jár háromféle szakkör valamelyikére: 17-en méhészetre, 12-en medvetáncra és 15-en kungfura. Azok száma, akik pontosan kétféle szakkörre járnak, éppen ötszöröse azok számának, akik mindhárom szakkörön részt vesznek. Az osztályba járó fiú medvebocsok egynegyede jegesmedve, a többiek barnamedvék. Hány fős az osztály, ha tudjuk, hogy a fiú barnamedvék száma megegyezik a lányok számának felével?

Végeredmény

30

Megoldás

1. A feladatban megadták, hogy hányan járnak egy-egy szakkörre. Ne hagyjuk figyelmen kívül, hogy ezekben a létszámokban azok is benne vannak, akik több szakkörre is járnak! Ez azt jelenti, hogy a fenti számok összege, $17 + 12 + 15 = 44$ lehet, hogy több, mint az osztály létszáma, hiszen lehetnek olyanok, akiket többször számoltunk.

2. Az előző pont összeadásában kétszer számoltuk azokat, akik pontosan két szakkörre járnak, és háromszor azokat, akik pontosan három szakkörre járnak (ezekről a csoportokról azt tudjuk, hogy létszámaik aránya 5:1), az osztály létszáma tehát úgy adódik a 44-ből, hogy levonjuk az előbbieket egyszer, az utóbbiakat kétszer.

3. Az előbbi pont alapján a háromszakkörösöket x-szel jelölve felírhatjuk az osztály létszámára az alábbi kifejezést: $44 - 5 \cdot x - 2 \cdot x =?$

4. A feladat utolsó két mondata szerint a jegesmedve fiúk, a barnamedve fiúk és a lányok egymáshoz viszonyított aránya rendre 1:3:6. Mivel a fiúk-lányok létszáma csak egész szám lehet, ez az arány azt jelenti, hogy az osztály létszáma egy 10-re kerek szám.

5. Az 1. pontban adott egy felső korlát a feladat megoldására, amely így a 4. pontot is figyelembe véve 10, 20, 30 vagy 40 lehet.

6. Ha mind a négy lehetséges megoldást belepróbáljuk a 3. pont egyenletének jobb oldalára, azt tapasztaljuk, hogy 10-re, 20-ra és 40-re x nem egész számnak adódik (ami nem lehetséges, bocsokról lévén szó), 30-ra azonban igen, így a 30 a helyes megoldásunk.

4. feladat

Ada, Bubu és Csabi kaptak Dóritól egy-egy pozitív egész számot, és Dóri azt is elárulta, hogy a számok reciprokösszege 1. Ezek után megkérdezte tőlük, hogy ki tudják-e találni a három szám összegét. Sorban a következőket válaszolták:
Ada: „Nem tudom, hogy mi a három szám összege.”
Bubu: „Én sem tudom a számok összegét.”
Csabi: „Engem ez az egész nem érdekel.”
Ada: „Én már tudom az összeget.”
Melyik számot adta Dóri Bubunak?

Végeredmény

3

Megoldás

1. Legyen a három szám $e \leq f \leq g$, ekkor a feltétel szerint $\frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g} = 1$. Minél nagyobb egy szám, annál kisebb a reciproka, ezért tudjuk, hogy $\frac{1}{e} \geq \frac{1}{f} \geq \frac{1}{g}$ (egyenlőség akkor lehet, ha maguk a számok is egyenlőek). Vegyük észre azt is, hogy ha két számot ismerünk, akkor a harmadikat már egyértelműen ki tudjuk számolni!

2. Vizsgáljuk meg, milyen számhármasok jöhetnek szóba! Végezzünk esetszétválasztást a legkisebb szám, e szerint.

   (a) $e \neq 1$, mivel minden szám, és így a reciprokuk is pozitív, tehát ha $e = 1$ teljesülne, akkor a reciprokösszeg $\frac{1}{1} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g} \geq 1$ lenne.

   (b) $e = 2$ esetén $f \neq 2$, mivel ekkor a reciprokösszeg $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{g} \geq 1$ lenne.
   $f = 3$ viszont megoldást ad, ekkor $g = 6$.
   $f = 4$ szintén megoldást ad, ekkor $g = 4$.
   $f > 4$ már nem adhat jó megoldást, mivel ekkor az $f \leq g$ nem tudna teljesülni. (Meggondolható, hogy rögzített e esetén nagyobb f értékhez kisebb g tartozik.)

   (c) $e = 3$ esetén csak az $f = g = 3$ megoldás adódik,
   $f > 3$ esetén az $f \leq g$ nem teljesülhet.

   Összességében tehát megállapíthatjuk, hogy Dóri csak a $(2, 3, 6)$, a $(2, 4, 4)$ és a $(3, 3, 3)$ számhármasok valamelyikét adhatta Bubuéknak. A három számhármas esetén Dóri által kérdezett összeg $2+3+6 = 11$, $2 + 4 + 4 = 10$ és $3 + 3 + 3 = 9$.

3. Biztos, hogy Ada nem 6-ost kapott. Ugyanis ha 6-ost kapott volna, akkor biztos lehetett volna benne, hogy a $(2, 3, 6)$ számhármasról van szó, és tudta volna az összeget. Ugyanígy biztos az is, hogy nem 4-est kapott, mivel ekkor tudta volna, hogy a $(2, 4, 4)$-es számhármasról van szó, és szintén tudta volna az összeget.

	A	
2	2	3
3	$\cancel{4}$	3
$\cancel{6}$	$\cancel{4}$	3

4. Most vizsgáljuk meg Bubu első megszólalását! Az előzőleg elmondott logika szerint kiderül, hogy ő sem kaphatott sem 6-ost, sem 4-est.

	A	
2	2	3
3	$\cancel{4}$	3
$\cancel{6}$	$\cancel{4}$	3

	B	
2	2	3
3	$\cancel{4}$	3
$\cancel{6}$	$\cancel{4}$	3

Ebből viszont már kiderül, hogy nem lehet a kiosztott számhármas a $(2, 4, 4)$, mivel sem Ada, sem Bubu nem kaptak 4-est, márpedig a $(2, 4, 4)$ esetén a három gyerek közül csak egy lehet, aki nem négyest kap.

	A	
2	$\cancel{2}$	3
3	$\cancel{4}$	3
$\cancel{6}$	$\cancel{4}$	3

	B	
2	$\cancel{2}$	3
3	$\cancel{4}$	3
$\cancel{6}$	$\cancel{4}$	3

5. Csabi megszólalása természetesen semmilyen információt nem rejt, legfeljebb az olvasó megzavarására alkalmas.

6. Bubu megszólalása után Ada már tudja, hogy melyik számhármasról van szó. Ez csak úgy lehetséges, ha a nála lévő szám alapján a még szóba jövő számhármasok, a $(2, 3, 6)$ és a $(3, 3, 3)$ közül el tudja dönteni, melyikről van szó: mivel a 3-as mindkét számhármasban benne van, Ada a 2-est kapta, és a Dóri által kiosztott három szám a $(2, 3, 6)$.

	A	
2	$\cancel{2}$	$\cancel{3}$
$\cancel{3}$	$\cancel{4}$	$\cancel{3}$
$\cancel{6}$	$\cancel{4}$	$\cancel{3}$

7. Tudjuk, hogy Bubunál nincs a 6-os, és nem lehet nála a 2-es sem (hiszen az Adánál van). Tehát a nála lévő szám a 3-as.

	A	
2	$\cancel{2}$	$\cancel{3}$
$\cancel{3}$	$\cancel{4}$	$\cancel{3}$
$\cancel{6}$	$\cancel{4}$	$\cancel{3}$

	B	
$\cancel{2}$	$\cancel{2}$	$\cancel{3}$
3	$\cancel{4}$	$\cancel{3}$
$\cancel{6}$	$\cancel{4}$	$\cancel{3}$

5. feladat

Az Óperenciás-tengeren fekvő Vadkörte-szigetre érkező telepesek a szigetet három egyenes vonallal hét régióra osztották fel. Ezután a választott kormányzójuk elrendelte, hogy minden régió alapítson legalább egy, de legfeljebb hét várost úgy, hogy semelyik két régióban ne legyen azonos a városok száma. A telepesek azt szeretnék, hogy mindhárom egyenesre igaz legyen, hogy a két oldalán ugyanannyi város van. Mik a lehetséges értékei a tengerrel nem érintkező régióban alapított városok számának, ha mind a kormányzó, mind a telepesek kívánsága teljesül?

Végeredmény

1, 2 és 4

Megoldás

1. A hét régióba 1-től 7-ig kell elhelyeznünk a számokat, tehát összesen $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ városunk lesz.

2. Tekintsük az egyik egyenes vonalat: 4 régió lesz az egyik oldalán, 3 a másikon. A 28 városból így 14-nek kell a 4 régióba és 14-nek kell a 3 régióba kerülnie.

3. Próbáljuk meg szisztéma szerint, hogy melyik 4 szám összegeként jöhet ki a 14. $1+2+3$ kombinációhoz 8 lenne a negyedik szám, ez nem jó. $1+2+4+7$ jó kombináció. Így szisztematikusan megnézve kiderül, hogy a következő kombinációk jók:

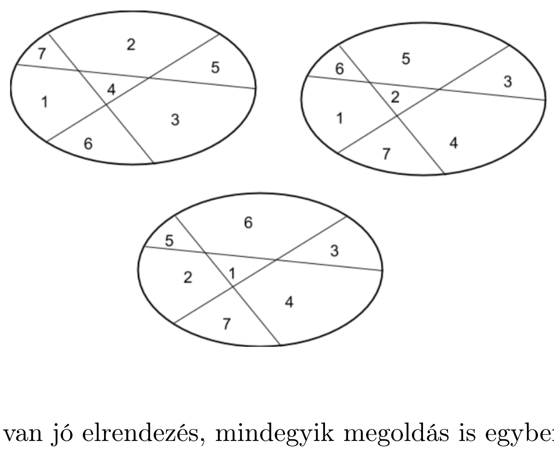
   (a) $1 + 2 + 4 + 7$
   (b) $1 + 2 + 5 + 6$
   (c) $1 + 3 + 4 + 6$
   (d) $2 + 3 + 4 + 5$

4. Három egyenes vonalunk van, és mindegyiknek az egyik oldalán 4 régió van, amibe a fenti városszámokat kell elhelyeznünk. Ez azt jelenti, hogy a fenti négy kombinációból egyszerre háromra mindig szükségünk van. Mivel mindig egyet hagyunk ki, így erre négy lehetőségünk van.

5. A középső régió mindegyik egyenesnek arra az oldalára esik, ahol a 4 régió van. Ezért ennek a régiónak a városszáma mindegyik kombinációban benne kell legyen, és ez lesz a középső régióban.

6. Ha az első kombinációt hagyjuk ki, akkor nincs olyan szám, ami mindhárom kombinációban benne van, így ez nem jó megoldás. Ha a második kombinációt hagyjuk ki, akkor a középső régióba 4 város kerül, ha a harmadik kombinációt, akkor 2, ha az utolsót, akkor 1.

7. Rajzoljunk ábrákat a fenti feltételek alapján:



8. Mivel mindhárom értékhez van jó elrendezés, mindegyik megoldás is egyben.

6. feladat

A síkon 100 pontot pirosra színezünk. Ezután behúzunk 2019 egyenest, amelyek mindegyikén van legalább egy piros pont. Hány olyan metszéspontja lehet legfeljebb az egyeneseknek, ami nem piros?

Végeredmény

2017791

Megoldás

1. A legtöbb metszéspont abban az esetben állhat elő, ha semelyik két egyenes nem párhuzamos, vagyis bármely kettőnek van metszéspontja. Ezen metszéspontok közül néhány a piros pontokra fog esni, hiszen ellenkező esetben minden piros ponton legfeljebb egy egyenes mehetne át, ami $2019 > 100$ miatt nem lehetséges.

2. Feltehető, hogy az egyenesek közül egyik sem megy át több piros ponton, hiszen ha létezne egy egyenes, amely legalább két piros ponton átmegy (jelöljük ezt az egyenest e-vel), akkor ha azt úgy forgatnánk el az egyik piros pontja körül (jelöljük ezt a pontot P-vel), hogy továbbra se legyen párhuzamos másik egyenessel, de semelyik másik piros ponton vagy egyenesek másik metszéspontján ne menjen át, akkor ezzel a lépéssel biztosan nem csökkentjük a nem piros metszéspontok számát. Viszont ha másik egyenes is átmegy az e egyenes egy P-től különböző piros pontján, akkor e megfelelő elforgatásával még nő is a nem piros metszéspontok száma. Vagyis ezekkel az esetleges javító (semmiképp sem rontó) lépésekkel előállíthatnánk olyan konstrukciót, melyben a nem piros metszéspontok száma nem kevesebb mint abban a kiinduló konstrukcióban, ahol több piros ponton is átmehettek egyenesek.

3. Ezután az optimális konstrukcióhoz úgy jutunk, ha az egyeneseket egyesével vesszük fel. Egy újabb egyenes felvételénél akkor nyerjük a legtöbb nem piros metszéspontot, ha az nem párhuzamos semelyik másikkal, nem megy át már meglévő nem piros metszésponton, és azon a piros ponton megy át, mely az előző egyenesek közül a legkevesebbnek pontja (ha több piros pont is van, melyen ugyanannyi egyenes megy át, mindegy melyiket választjuk). Ily módon, ha eddig n egyenest vettünk fel, melyek közül az új egyenes piros pontján p ment át, akkor $n-p$ új nem piros metszéspont születik, ennél több az előzőek miatt nem lehetséges.

4. Leszámlálva az egyenesek egyesével felvétele során születő nem piros metszéspontokat így azt látjuk, hogy az első száz egyenes n-et hoz, ha előtte már n egyenes volt, a második száz $n-1$-et, a harmadik száz $n-2$-őt, és így tovább a 2000. egyenes $1999-19$-et, a 2019. pedig $2018-20$-at.

5. Vagyis a metszéspontok számát megkapjuk, ha összeadjuk az egyes egyenesek által létrehozott új metszéspontokat. Ez az összeg a fentiek alapján 1-től 2018-ig a számok összege, melyből kivonjuk 1-től 19-ig a számok összegét 100-szor, illetve a 20-at 19-szer. Vagyis a végeredmény a Gauss-módszerből ismert képletet felhasználva $\frac{2018\cdot 2019}{2}-\frac{19\cdot 20}{2}\cdot 100-20\cdot 19=2017791$.

7. feladat

Egy 8×8-as sakktábla két különböző mezőjére véletlenszerűen elhelyezünk egy világos bástyát és egy sötét huszárt. Mekkora a valószínűsége, hogy valamelyikük üti a másikat? (A bástya üti a vele egy sorban vagy egy oszlopban lévő mezőket, a huszár pedig a tőle lólépésben lévőket, vagyis azokat, melyekhez úgy jut el, hogy az egyik irányba kettőt lép, majd arra merőlegesen még egyet.)

Végeredmény

$11/36 = 0.30555...$

Megoldás

1. A két bábut összesen $64 \cdot 63 = 4032$ féleképp lehet a sakktáblára felrakni, tehát ennyi az összes eset száma.

2. A bástyát bárhová rakjuk fel, összesen $7 + 7 = 14$ mezőt fog ütni. Tehát összesen $14 \cdot 64 = 896$ olyan elhelyezés van, ahol a bástya üti a huszárt.

3. A huszár a helyzetétől függően különböző számú mezőt üt, ezek számát tekintsük át az alábbi táblázatban (könnyen meggondolható, hogy a tábla négy negyedén szimmetrikusak ezek az értékek, ezért csak az egyik negyedet ábrázoljuk):

2	3	4	4	...
3	4	6	6	...
4	6	8	8	...
4	6	8	8	...
...	...	...	...	...

   Ezeket az értékeket összegezve láthatjuk, hogy $4 \cdot (2 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 8) = 4 \cdot 84 = 336$ olyan elhelyezés van, ahol a huszár üti a bástyát.

4. Mivel nem tud olyan helyzet előállni, hogy a bástya és a huszár kölcsönösen ütik egymást, ezért nincs olyan eset, amit többször számoltunk volna. Tehát összesen $896 + 336 = 1232$ olyan eset van, ahol az egyik figura üti a másikat.

5. A *kedvező esetek száma per összes eset száma* szabályt alkalmazva megkapjuk, hogy a keresett valószínűség értéke:
$$\frac{1232}{4032} = \frac{11}{36} = 0.30\overline{5}$$

8. feladat

Egy 25 fős osztályban a tanár felír egy számot a táblára. A gyerekek sorra a következő megállapításokat teszik róla: „Osztható 1-gyel.”, „Osztható 2-vel.”, „Osztható 3-mal.”, ..., „Osztható 25-tel.”. Melyik a lehető legkisebb szám, amit a tanár felírhatott a táblára, ha tudjuk, hogy pontosan 2 diák tévedett, ráadásul tudjuk azt is, hogy ők két egymást követő számot mondtak?

Végeredmény

787386600

Megoldás

1. Azok a diákok, akik azokat a számokat mondták, melyeknek a 2-szerese és a 3-szorosa is 25-nél kisebb, nem tévedhettek, hiszen tudjuk, hogy csak 2 diák tévedett. Ha viszont ők tévednének, akkor a kétszerest és háromszorost mondó diák is tévedett volna, ami ellentmondás, mert csak ketten tévedtek. Így $1, 2, 3, \ldots, 8$ osztja a táblán lévő számot.

2. Az előző állítás következménye, hogy az előző számok prímtényezőinek szorzataként előálló számokat mondók (vagyis $10, 12, 14, 15, 20, 21, 24$) se tévedhettek.

3. Mivel két egymást követő számot mondó diák tévedett, így tudjuk azt is, hogy azok sem tévdehettek, akik esetén mindkét szomszédos számról (25 esetén a 24-ről) már tudjuk, hogy nem tévedtek. Így nem tévedés a $9, 11, 13, 25$ se.

4. A 2. pontban szereplő gondolatot megismételve kiderül, hogy a $9 \cdot 2 = 18$ és a $11 \cdot 2 = 22$ se tévedés. Ez után a 3. pontban szereplő gondolatot a kibővített listára megismételve azt is megtudjuk, hogy a 19 és a 23 sem tévedés.

5. Ez után már csak a 16-ról és a 17-ről nem tudjuk, hogy biztosan nem tévedés, vagyis a szám 16-tal és 17-tel nem osztható.

6. Mivel a legkisebb olyan számot keressük, melyet a tanár a táblára írhatott, az összes többi szám legkisebb közös többszöröse, vagyis $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 = 787386600$ a megoldás.

9. feladat

Trükkös Tivadarnak van hét trükkös pénzérméje. Mindegyik érme egyik oldalán az 1-es szám található. Az érmék másik oldalán pedig rendre az $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{8}$ törtszámok. Egy unalmas délután dobálta az érméket, mindannyiszor egyszerre dobta fel mind a 7 érmét. Csoda történt: az első 128 dobás között nem volt két egyforma. Tivadar minden dobás után le is írta a dobott számok szorzatát. Mennyit kap, ha összeadja a lapon szereplő 128 számot?

Végeredmény

4,5

Megoldás

1. Minden érmének vagy az az oldala van felül, amin az 1-es van, vagy az az oldala van felül, amin a törtszám van (a törtszám minden érmén különböző). 7 db érme van, így $2^7 = 128$-féle dobás lehetséges. Tehát a Tivadar az összes lehetséges dobás szorzatainak összegét kapja.
2. n darab pénzérme esetére a kérdéses összeget jelöljük S_n-nel! (Mi S_7-re vagyunk kíváncsiak.)
3. A 2^n-féle lehetséges dobást két részre tudjuk bontani: a dobások egyik felében az $\frac{1}{n+1}$-et tartalmazó pénzérme úgy esett, hogy az $\frac{1}{n+1}$ van felül rajta, a dobások másik felében pedig az 1-es van felül rajta.
   - A dobások első felében (2^{n-1}-féle dobás) minden szorzatban szerepel az $\frac{1}{n+1}$, így a szorzatok összegéből kiemelhető. A kiemelés után pont S_{n-1} marad (hiszen az $\frac{1}{n+1}$-hez tartozó pénzérmét a kiemeléssel pont „kiszedtük a játékból”).
   - A dobások másik felénél (szintén 2^{n-1}-féle dobás) kapott összeg pont S_{n-1}, hiszen itt az $\frac{1}{n+1}$-hez tartozó érmén mindig 1-es van, így a szorzatokba „nem számít bele”.
4. A fentiek alapján S_n-et ki tudjuk fejezni S_{n-1}-gyel: $S_n = \frac{1}{n+1} \cdot S_{n-1} + S_{n-1} = \left(\frac{1}{n+1} + 1\right) \cdot S_{n-1} = \frac{n+2}{n+1} \cdot S_{n-1}$.
5. Az 1 darab pénzérméhez tartozó összeg $S_1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, hiszen ezen az egy pénzérmén vagy az 1-es, vagy az $\frac{1}{2}$ van felül.
6. S_7 a fenti iterációs lépés hatszori alkalmazásával megkapható S_1-ből: $S_7 = \frac{9}{8} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot S_1 = \frac{9}{8} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}$.
7. A szorzatban a 9-es és a 2-es kivételével minden számláló és nevező kiesik, tehát a végeredmény: $S_7 = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

10. feladat

Egy Medve Carlói kaszinóban a kártyákat keverőgépekkel keverik. Egy keverőgép egy pakliban a kártyák sorrendjét mindig ugyanúgy változtatja meg. A kaszinó dolgozói megfigyelték, hogy ha egy 6 különböző lapból álló paklit sorba rendeznek, akkor utána akárhányszor keverik meg a rendelkezésükre álló keverőgépekkel, összesen (az eredeti sorrenddel együtt) csak 24-féle sorrendbe tudják átkeverni. Legfeljebb hány olyan 6 különböző lapból álló paklit lehet összeállítani, amelyek közül egyiket sem lehet a keverőgépekkel átkeverni másikba?

Végeredmény

30

Megoldás

1. 6 különböző lapból álló paklit elvileg 6!-féleképpen tudunk sorbarendezni (vagyis átkeverni).
2. Egy adott P_1 pakliból 23 másik paklit lehet sokszori átalakítással előállítani. Alkossa ez a $23 + 1$ pakli a H_1 halmazt.
3. Ha egy P pakli H_1-ben van, azaz megkapható P_1-ből átkeveréssel, akkor P-t is át lehet úgy keverni, hogy P_1-et kapjunk. Ugyanis legyen H_P azon paklik halmaza, amik P-ből átkeverhetők, beleértve P-t is. Tudjuk, hogy $|H_P| = 24$. Másrészt ha egy Q paklit kikeverhetünk P-ből, akkor mivel P-t megkaphatjuk P_1-ből, Q megkapható P_1-ből is. Ezek szerint $H_P \subseteq H_1$ (azaz minden pakli, ami P-ből kikeverhető, az P_1-ből is kikeverhető). Mivel mindkét halmaz egyforma elemszámú (24), a két halmaz megegyezik: $H_P = H_1$. Speciálisan $P_1 \in H_1 = H_P$, ami épp azt jelenti, hogy P-ből P_1 kikeverhető.
4. Tehát lényegében az összes lehetséges paklit (permutációt) ezek a lehetséges átalakítások egyenként 24-elemű, diszjunkt, azaz közös elem nélküli részhalmazra bontják, melyek mindegyikéből legfeljebb egy paklit választhatunk.
5. Ezért H_1-ből legfeljebb egy paklit választhatunk, legyen ez akkor éppen P_1.
6. A maradék $6! - 24$ pakliból válasszunk egy tetszőlegeset P_1 mellé, legyen ez P_2. Ez jó választás lesz, mert a megfelelő részhalmazoknak nincs közös eleme. P_2 kiválasztásával újabb 24 darabbal csökken a paklik száma, hiszen P_2 is 23 másik pakliba keverhető át.
7. És így tovább, a 6! paklit $\frac{6!}{24} = 30$ darab 24-elemű részhalmazra tudjuk felosztani, és ezek mindegyikéből egyet választhatunk.
8. A válasz tehát az, hogy legfeljebb 30 paklit tudunk úgy összeállítani, hogy közülük egyiket se lehessen a keverőgépekkel átkeverni másikba.

11. feladat

A svábbogarak börtönében 99 svábbogár sorakozott fel az ebédosztáshoz, azonosítószámuk szerint növekvő sorrendben. A konyhához vezető folyosó fala fehérre van meszelve, a padlóját pedig pontosan 2×99 csempe borítja, a börtöntöltelékek a jobb oldali csempesoron állnak. Egy csempén (biztonsági okok miatt) csak egy svábbogár állhat. Azonban rossz sorrendben álltak fel, pont fordítva kellett volna, az azonosítószám szerint csökkenő sorrendben. A fegyőr rájuk parancsol, hogy kezdjék meg az átrendeződést, a biztonsági szabályok betartásával. Minden másodpercben, a fegyőr sípszavára egy bogár átmehet egy szomszédos csempére (olyanra, melynek közös oldala van az eredeti csempével), azonban egy csempén továbbra is csak egy bogár tartózkodhat. Az ételosztás akkor kezdődhet meg, ha mindannyian a jobb oldalon, a helyes sorrendben állnak. Legkevesebb hány másodperc múlva kerülhet erre sor?

Végeredmény

5096

Megoldás

1. Először alsó korlátot adunk a lépések számára, majd mutatunk olyan konstrukciót, melyre ez megvalósul.

2. Először is mindenkinek legalább annyit kell lépnie, mint amilyen messze van a céljától kezdetben. A középső bogár esetén ez 0, a szomszédaira 2-2, kifelé haladva tovább 4-4, 6-6, stb. Végül az első és az utolsó egymástól 98 távolságra vannak. Ez összesen $2 \cdot (2 + 4 + \ldots + 98) = 4900$ lépés.

   Legalább 98 bogárnak a másik sorba is át kell lépnie valamikor, hiszen ha lenne 2, akik sosem lépnek át, akkor ők nem tudnák megkerülni egymást, márpedig bármely kettőnek helyet kell cserélnie. Node aki átlép egyszer, annak vissza is kell lépnie valamikor, ez összesen tehát legalább $2 \cdot 98 = 196$ lépés.

   Tehát biztosan szükség van legalább $4900 + 196 = 5096$ lépésre.

3. Kezdetben a bogarak így helyezkednek el a folyosón:

bal oldal					...			
jobb oldal	1	2	3	4	...	97	98	99

   Innen 98 lépéssel elérhető:

bal oldal		2	3	4	...	97	98	99
jobb oldal	1				...			

   Még 98 lépés árán:

bal oldal		2	3	4	...	97	98	99
jobb oldal					...			1

   Innen 97 lépéssel:

bal oldal			3	4	...	97	98	99
jobb oldal							2	1

   További 95 lépéssel:

bal oldal				4	...	97	98	99
jobb oldal					...	3	2	1

   Hasonlóan tovább. A 45-ösnek, aki a középső, csak 1-et kell lépnie, a 46-osnak már 3-at, a 47-esnek 5-öt, stb.

bal oldal					...			99
jobb oldal		98	97	96	...	3	2	1

Végül a 99-esnek már 99-et:

bal oldal					...			
jobb oldal	99	98	97	96	...	3	2	1

4. Ez összeadva 5096 lépés, tehát legalább 5096 másodpercre van szükség, és annyi elég is.

12. feladat

Egy segélyszervezet egy 100 napos jótékonysági kampány keretében szeretne támogatást nyújtani Éhenkorácia 100 legkisebb lakosságú településének. Az előkészítő felmérés során kiderült, hogy a lakók száma bármely két településen különböző, illetve az is, hogy a támogatott települések közül a legnagyobb lélekszámúban éppen 100-an laknak. A kampány során minden nap olyan segélycsomagokat állítanak össze, amelyek épp a nap sorszámával megegyező számú tallért tartalmaznak, és minden olyan településnek juttatnak egy csomagot, ahol a lakosság el tudja igazságosan osztani azt (tehát például a 6. napon egy-egy 6 talléros csomagot juttatnak el az 1, a 2, a 3 és a 6 lakosságú településeknek, és így összesen 12 lakosnak jut rész támogatásból). Hány olyan nap lesz a kampány során, amikor összesen páratlan számú éhenkóráciai részesül a szervezet juttatásából?

Végeredmény

17

Megoldás

1. A 100 település közül bármely kettőben különböző a lakók száma, ami csak úgy lehetséges, hogy az egyes falvakban rendre 1, 2, ...100 lakó van.

2. Minden napon pontosan azon települések lakói kapnak segélycsomagot, amelyek lakóinak száma osztja a nap sorszámát, vagyis az n-edik napon éppen annyian kapnak, amennyi n osztóinak összege.

3. Legyen $p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_l^{k_l}$ az n prímtényezős felbontása. Az n osztóinak összegét a prímtényezők ismeretében a következőképpen is számolhatjuk:

   $$(1 + p_1 + \ldots + p_1^{k_1}) \cdot (1 + p_2 + \ldots + p_2^{k_2}) \cdot \ldots \cdot (1 + p_l + \ldots + p_l^{k_l}).$$

   (A képlet helyességét a zárójeleket felbontva könnyen ellenőrizhetjük.)

   A kérdés az, hogy hány 100-nál nem nagyobb pozitív egész számnak páratlan az osztóinak az összege. A fenti szorzat pontosan akkor páratlan, ha minden tényezője páratlan.

4. Vegyük észre, hogy a 2 kitevője a prímtényezős felbontásban nem számít, hiszen az $1 + 2 + \ldots + 2^m$ összeg minden m természetes számra páratlan (Az $m = 0$ eset természetesen annak felel meg, hogy n páratlan.)

5. Minden más prímnek minden hatványa páratlan, így az egyes tényezők pontosan akkor lesznek páratlanok, ha páratlan sok tagból állnak, vagyis $k_1 + 1, \ldots, k_l + 1$ páratlanok, kivéve esetleg a 2 kitevőjét.

6. Vagyis pontosan azon számokra páratlan az osztók összege, amelyek prímtényezős felbontásában a páratlan prímtényezők páros kitevőn vannak. Ezek éppen a páratlan négyzetszámok és kettőhatványszorosaik. Ezek közül a 100-nál nem nagyobbak a következők:

   1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,
   9, 18, 36, 72,
   25, 50, 100,
   49, 98
   81.

13. feladat

Morgó Mária egy nap úgy dönt, hogy veteményeskertjét elkezdi bővíteni. A kert eddig egy darab szabályos háromszög alakú ágyásból áll, melynek oldalhossza 1 öl. Veteményesét úgy szeretné növelni, hogy minden nap egy ugyanilyen ágyást illeszt egy korábbi ágyás oldalához úgy, hogy azok teljes oldallal érintkezzenek. Ez így megy egészen addig, míg 2019 ágyása nem lesz Máriának. Ekkor úgy dönt, hogy nem bővíti tovább veteményesét, hanem körbekeríti azt. Legalább hány öl hosszú kerítésre lesz szüksége?

Végeredmény

111

Megoldás

1. Először megvizsgáljuk, hogy adott $K \geq 8$ kerület esetén milyen alakú lehet a lehető legtöbb ágyásból álló kert, amit K hosszú kerítéssel körbe lehet keríteni. A továbbiakban egy sokszög (alakú kert) területe alatt azt fogjuk érteni, hogy hány ágyásból (1 öl oldalhosszú szabályos háromszögből) áll.

   - Mivel a veteményeskert szabályos háromszögekből felépülő sokszög, így belső szögei csak 60°-osak, 120°-osak, 240°-osak, illetve 300°-osak lehetnek.
   - Nagyobb kerülethez nagyobb maximális terület tartozik. Ugyanis egy adott kerület esetén maximális területű kertben válasszunk egy oldalt, amelyhez ha hozzáillesztünk egy újabb ágyást, az egyik korábbi ágyással se érintkezik (ezt mindig megtehetjük). Ezzel a hozzáillesztéssel a kerület és a terület is 1-el nő, tehát az eggyel nagyobb kerülethez legalább eggyel nagyobb maximális terület tartozik.
   - Ha a kert konkáv sokszög alakú lenne, akkor növelhetnénk a területét úgy, hogy a 240°-os szögű csúcsoknál beillesztünk egy két háromszögből álló paralelogrammát, míg a 300°-os szögű csúcsoknál egy háromszöget. Ezek a lépések növelik a területet, de nem növelik a kerületet. Tehát adott kerület mellett a maximális területű kert konvex.
   - Ha egy konvex kertnek van 60°-os belső szöge, akkor az itt található háromszöget levágva biztosan lesz a megmaradó sokszögnek legalább egy legalább 2 öl hosszú oldala a $K \geq 8$ feltétel miatt. Ha a levágott háromszöget átillesztjük a megmaradó sokszög egy legalább 2 öl hosszú oldalára, azzal egy azonos kerületű konkáv sokszöget hozunk létre, ami az előző pont szerint nem lehet maximális területű. Tehát egy maximális területű kert minden szöge 120°, így a kert hatszög alakú.

2. Második lépésként megvizsgáljuk, hogy adott $K \geq 8$ kerület esetén mekkora a maximális területű kert területe. Ez a kert az 1. pont alapján hatszög alakú, mindegyik szöge 120°-os.

   - A további lépésekben pontosan le fogjuk vezetni a K kerülethez tartozó maximális területet. A megkapott eredmények alátámasztják a maximális területű sokszög előállításának alábbi egyszerű módját. Ha $K = 6j$, akkor a maximális területű sokszög egy szabályos hatszög. Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy mindig, amikor a kerületet eggyel növeljük, akkor egy újabb oldalhoz teszünk hozzá „egy rétegnyi” ágyást. Kicsit pontosabban: Ha eggyel növeljük a $6j$ hosszú kerületet, azaz $K = 6j+1$, akkor a maximális terület $2j-1$-el nő, azaz a szabályos hatszög egyik oldalára rátettünk egy olyan szimmetrikus trapézt, amelynek alapjai j és $j-1$, szárai 1 öl hosszúak, így a hatszög oldalai rendre $j, j, j, j+1, j-1, j+1$. A kerület további növelése esetén a terület mindig $2j+1$-el nő. Ekkor mindig az egyik $j+1$ hosszúságú oldalra helyezünk rá egy olyan szimmetrikus trapézt, aminek az alapjai $j+1$ és j, szárai 1 öl hosszúságúak.
   - Legyen H egy olyan hatszög, amelynek kerülete K, területe maximális. A H hatszög oldalait jelölje rendre a, c', b, a', c, b'. Ezeket a betűket az oldal hosszának jelölésére is használni fogjuk. A hatszöget foglaljuk bele egy nagyobb háromszögbe, amelynek oldalai legyenek az a', b', c' oldalak meghosszabbításai. Ez a háromszög szabályos, mivel minden szöge 60°. Jelölje a nagy háromszög oldalának hosszát s.
   - H-t úgy is megkaphatjuk, hogy egy s oldalú szabályos háromszögből a csúcsainál levágunk egy-egy a, b, illetve c oldalú szabályos háromszöget. Ebből következik, hogy H kerülete $K = 2s-(a+b+c)$, a területe pedig $s^2 - a^2 - b^2 - c^2$. A területet leíró képletnél felhasználtuk, hogy egy a oldalú szabályos háromszög területe a^2, ami belátható például teljes indukcióval.

- H területe csak úgy lehet maximális, ha a, b és c közül bármely kettő különbsége legfeljebb 1. Ha például $a > b+1$ lenne, akkor a-t eggyel csökkentve, b-t eggyel növelve a kerület változatlan marad, de a terület $2(a-b-1)$-el nőne.
- K hatos maradéka meghatározza az a, b, c közötti különbségeket, ez alapján 6 eset lehetséges. A továbbiakban tegyük fel, hogy $a \geq b \geq c$. Mindegyik esetben teljes négyzetté alakítással keressük meg, hogy milyen a esetén lehet maximális H területe.

  (a) Ha $K = 6j$, azaz osztható 6-tal, akkor $a = b = c$, így $K = 6j = 3s - 3a$, és H területe

  $$T = s^2 - 3a^2 = (2j+a)^2 - 3a^2 = -2\,(a-j)^2 + 6j^2.$$

  A terület $a = j = \frac{K}{6}$ esetén maximális, ekkor $T = 6j^2 = \frac{K^2}{6}$.

  (b) Ha $K = 6j+1$, azaz 6-tal osztva 1-et ad maradékul, akkor $a = b = c+1$, így $K = 6j+1 = 3s - 3a + 1$, és H területe

  $$T = s^2 - 3a^2 + 2a - 1 = (2j+a)^2 - 3a^2 + 2a - 1 = -2\left(a - \frac{2j+1}{2}\right)^2 + 6j^2 + 2j - \frac{1}{2}.$$

  A terület $a = j+1 = \frac{K+5}{6}$ esetén maximális, ekkor $T = 6j^2 + 2j - 1 = \frac{K^2-7}{6}$.

  (c) Ha $K = 6j+2$, akkor $a = b+1 = c+1$, így $K = 6j+2 = 3s - 3a + 2$, és H területe

  $$T = s^2 - 3a^2 + 4a - 2 = (2j+a)^2 - 3a^2 + 4a - 2 = -2\,(a-j-1)^2 + 6j^2 + 4j.$$

  A terület $a = j+1 = \frac{K+4}{6}$ esetén maximális, ekkor $T = 6j^2 + 4j = \frac{K^2-4}{6}$.

  (d) Ha $K = 6j+3$, akkor $a = b = c$, így $K = 6j+3 = 3s - 3a$, és H területe

  $$T = s^2 - 3a^2 = (2j+1+a)^2 - 3a^2 = -2\left(a - \frac{2j+1}{2}\right)^2 + 6j^2 + 6j + \frac{3}{2}.$$

  A terület $a = j+1 = \frac{K+3}{6}$ esetén maximális, ekkor $T = 6j^2 + 6j + 1 = \frac{K^2-3}{6}$.

  (e) Ha $K = 6j+4$, akkor $a = b = c+1$, így $K = 6j+4 = 3s - 3a + 1$, és H területe

  $$T = s^2 - 3a^2 + 2a - 1 = (2j+1+a)^2 - 3a^2 + 2a - 1 = -2\,(a-j-1)^2 + 6j^2 + 8j + 2.$$

  A terület $a = j+1 = \frac{K+2}{6}$ esetén maximális, ekkor $T = 6j^2 + 8j + 2 = \frac{K^2-4}{6}$.

  (f) Ha $K = 6j+5$, akkor $a = b+1 = c+1$, így $K = 6j+5 = 3s - 3a + 2$, és H területe

  $$T = s^2 - 3a^2 + 4a - 2 = (2j+1+a)^2 - 3a^2 + 4a - 2 = -2\left(a - \frac{2j+3}{2}\right)^2 + 6j^2 + 10j + \frac{7}{2}.$$

  A terület $a = j+1 = \frac{K+1}{6}$ esetén maximális, ekkor $T = 6j^2 + 10j + 3 = \frac{K^2-7}{6}$.

3. A feladat kérdésének megválaszolásához keressük meg, hogy mi a legkisebb K, amelyhez tartozó maximális terület legalább 2019. Oldjuk meg a $T \geq 2019$ egyenlőtlenséget az előző pontban különböző maradékok esetén kapott képleteket behelyettesítve. Így azt kapjuk, hogy $K \geq 111$. A lehető legrövidebb kerítés hossza tehát legalább 111 öl.

4. Megmutatjuk, hogy van olyan elrendezése a 2019 ágyásnak, melynek a kerülete 111. A $K = 111$ kerülethez tartozó maximális terület $T = \frac{111^2-3}{6} = 2053$, az ezt előállító hatszög oldalhosszai rendre 18, 19, 18, 19, 18, 19 öl hosszúak. Egy tetszőleges csúcsból az egyik hozzá csatlakozó oldalra mérjünk fel 1 öl, a másikra 17 öl hosszúságot. Ezt a két szakaszt egészítsük ki paralelogrammává, majd a paralelogrammába eső ágyásokat vegyük ki a hatszögből. Az így kapott sokszög kerülete szintén 111, területe $2053 - 34 = 2019$. Tehát Máriának legalább 111 öl hosszú kerítésre van szüksége.

14. feladat

Gráfország grófjai utazásaikat griffhátos bonyolítják. Az ország mind a 9 városában van egy-egy griffistálló, a griffek innen szállnak fel és ide érkeznek. Egy griff hátán egyszerre csak egy gróf fér el, és egy griff naponta csak egy utat vállal (azaz egy grófot elszállít egy városból egy másikba). Ráadásul két griff ugyanazon a napon nem vállal olyan utat, aminek a kiinduló- és a célállomása is ugyanaz. Gráfország grófjai egy napon a fővárosból országjáró körútra indultak, váltott griffeken mindannyian meglátogatták Gráfország minden városát legalább egyszer, majd még ugyanazon a napon visszatértek a fővárosba. Legfeljebb hány gróf élhet Gráfországban?

Végeredmény

8

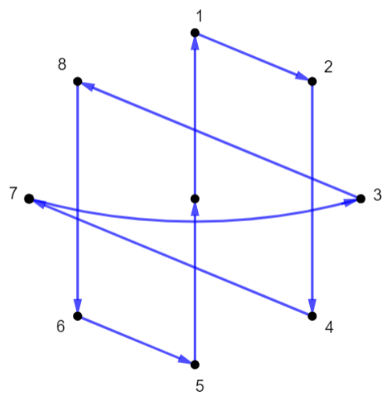
Megoldás

1. Egy gróf az útja során a fővárosból legalább egy kifelé, és legalább egy befelé repülő griff hátán is utazik.

2. A fővárosból legfeljebb 8 griff repül kifelé egy adott napon, és legfeljebb 8 griff érkezik meg oda, hiszen Gráfországnak 8 másik városa van, és két város között egy adott irányba csak egy griff közlekedik.

3. Ebből következik, hogy 8-nál több gróf nem élhet Gráfországban.

4. 8 gróf élhet ott, egy lehetséges konstrukció az országjáró körutakra a következő. Az első gróf útvonala az alábbi kör (középen található a főváros):



A többi gróf útvonalát úgy kapjuk meg, ha elforgatjuk a fenti körutat a főváros körül 45°-kal, 90°-kal, 135°-kal, stb. (Így nem használja két gróf ugyanazt a griffjáratot semelyik két város között. Ez például úgy látható, ha megvizsgáljuk, melyik gróf mely városba repül az 1-es városból, látni fogjuk, hogy ez a 8 gróf esetén mind különböző. A forgásszimmetria miatt a többi számozott várost már nem is kell leellenőrizni, csak a fővárost.)

15. feladat

A szabályos ötszög alakú Ötszögletű Kerek Mező lakói Ötödöt Országra Szóló Bújócskaversenyt szeretnének rendezni, de a mezőn nincs hova elbújni, ezért a tervek szerint a mezőt magas, egyenes sövényekkel 2019 kisebb ötszögre fogják bontani. A sövényeken nem lehet átlátni. A verseny kezdetekor minden résztvevőnek úgy kell elbújnia, hogy ne lássa őket egyetlen másik játékos sem, ha körbenéz. Úgy szeretnék megtervezni a sövényeket, hogy a lehető legtöbben részt tudjanak venni és el tudjanak ilyen módon bújni. Legfeljebb hány résztvevőt fogadhat az Ötödöt Országra Szóló Bújócskaverseny?

Végeredmény

5046

Megoldás

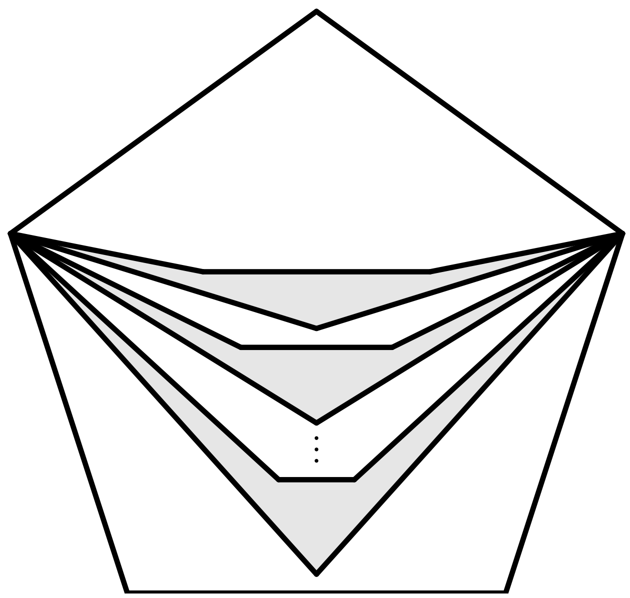
1. A résztvevők száma akkor maximális, ha maximális a 2019 kisebb ötszög konkáv belső szögeinek száma, hiszen minden ötszögben a konkáv belső szögek számánál eggyel több ember tud elbújni.

2. Egy ötszög belső szögeinek összege $540°$, így a 2019 ötszög belső szögeinek összege $2019 \cdot 540°$. Ez a mezőt jelentő szabályos ötszög belső szögeinek, illetve az ötszögek mező belsejében elhelyezkedő csúcsainál lévő szögek összegeként áll elő.

3. Mivel egy belső csúcsnál a szögek összege $360°$, a mező csúcsainál pedig $108°$, egy konkáv szög pedig $180°$-nál nagyobb, így egy belső csúcsnál legfeljebb egy konkáv belső szög lehet, a mező csúcsainál pedig egy sem.

4. Ha k darab olyan belső pont van, ami egy ötszögnek konkáv csúcsa, akkor az összes belső szögből ezeknél van $k \cdot 360°$, valamint a mezőt jelentő ötszög csúcsainál $5 \cdot 108°$. Vagyis $k \cdot 360° + 540° \leq 2019 \cdot 540°$, amiből $k \leq 3027$.

5. Vagyis legfeljebb $3027 + 2019 = 5046$ résztvevő lehet (2019 ötszög van, ezekben pedig legfeljebb 3027 db konkáv belső szög). Az alábbi ábrán mutatunk egy konstrukciót, mely éppen ezt valósítja meg, hiszen minden belső csúcsnál van konkáv belső szög.



Végeredmények

1. 10

2. 4

3. 30

4. 3

5. 1, 2 és 4

6. 2017791

7. $11/36 = 0.30555...$

8. 787386600

9. 4,5

10. 30

11. 5096

12. 17

13. 111

14. 8

15. 5046